মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ
(Gravitation and Gravity)

সূত্রাবলী

1. মহাকর্ষ সূত্র : $\boxed{F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}}$; $G = 6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$

   r = বস্তুদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

2. g এর বিভিন্ন সূত্র :

   (a) ভূপৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$; M = পৃথিবীর ভর $= 6 \times 10^{24}$ kg

   R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

   বা, $\boxed{g = \frac{4}{3}\pi \rho G R}$

   (b) ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $\boxed{g' = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g}$

   যেখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400$ km

   (c) ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $\boxed{g' = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g}$

   এই সূত্র দ্বারা g এর সন্নিকৃষ্ট মান নির্ণয় করা যায়।

   ~~একটি~~ এটি শুধুমাত্র $h \lll R$ শর্তটির ~~ক্ষেত্রে~~ প্রযোজ্য)

   (d) ভূপৃষ্ঠ হতে h গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $\boxed{g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g}$

   (e) আহ্নিক গতির জন্য কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ বের করার সূত্র : $g' = \boxed{g - \omega^2 R \cos^2\lambda}$

   এখানে, λ = অক্ষাংশ

   ω = পৃথিবীর কৌণিক বেগ $= \frac{2\pi}{T}$

   T = পৃথিবীর পর্যায়কাল = 24 h.

3. মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য, $E_G = \frac{GM}{r^2}$

   এখানে, ~~R~~ r = পৃথিবীর কেন্দ্র হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব

   $r = R + h$

4. মহাকর্ষীয় বিভব, $V = -\frac{GM}{r}$

r = পৃথিবীর কেন্দ্র হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব

বা, $r = R+h$

5. বিভবশক্তি, $E_p = -\frac{GMm}{r}$; $r = R+h$

- h → ভূপৃষ্ঠ হতে বস্তু যে উচ্চতায় অবস্থিত
- M → পৃথিবীর ভর
- E_p → পৃথিবীর কেন্দ্রের সাপেক্ষে বিভবশক্তি।

6. কৃত্রিম উপগ্রহ:

(a) কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$; h = উপগ্রহটি ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় ঘূর্ণায়মান

বা, $v = \frac{gR^2}{R+h}$; g = অভিকর্ষজ ত্বরণ (ভূপৃষ্ঠে)

বা, $v = \sqrt{g'(R+h)}$; g' = ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভি: ত্বরণ

(b) পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$; v = উপগ্রহের বেগ

বা, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}(R+h)^{3/2}$

বা, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{gR^2}}(R+h)^{3/2}$; g = ভূপৃষ্ঠে অভি: ত্বরণ

(c) ভূপৃষ্ঠ হতে উপগ্রহের উচ্চতা, $h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$

বা, $h = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$

(d) মোট শক্তি বা বন্ধন শক্তি, $E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R+h}$

7. মুক্তিবেগ:

ⓐ ভূপৃষ্ঠে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$

ⓑ ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} = \sqrt{2g'(R+h)}$

8. কেপলারের সূত্র:

ⓐ অনুসূরে গ্রহের বেগ (রৈখিক), $v_2 = \sqrt{\frac{GM_s}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$

অপসূরে গ্রহের রৈখিক বেগ, $v_1 = \sqrt{\frac{GM_s}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$

M_s = সূর্যের ভর

$a = \frac{\text{অপসূর ও অনুসূরের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{2}$

ⓑ $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \ldots = \text{constant}$

T_1 = ১ম গ্রহের পর্যায়কাল

T_2 = ২য়

T_3 = ৩য়

r_1 = ১ম গ্রহের সূর্য থেকে দূরত্ব

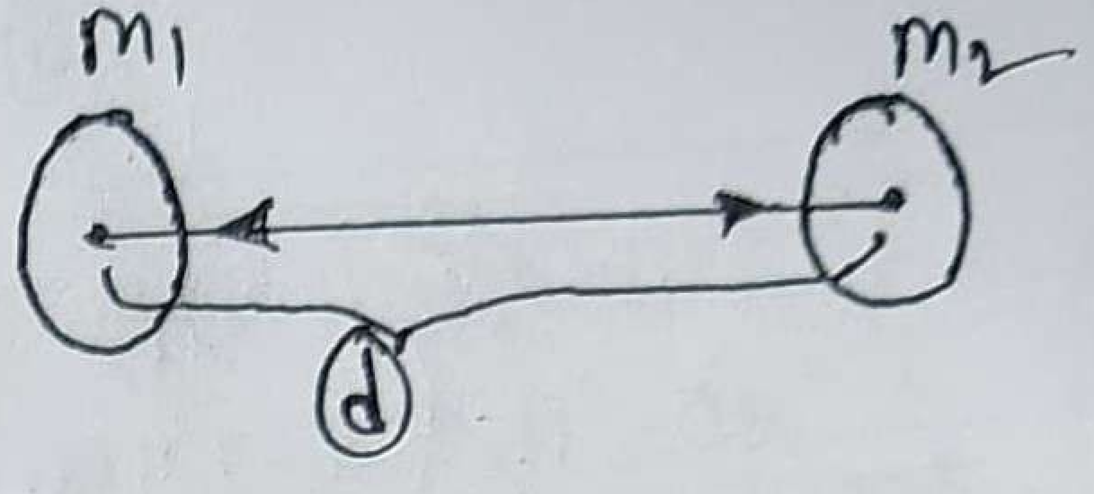
r_2 = ২য়

r_3 = ৩য়

মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ
(Gravitation and Gravity)

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র :

দুটি ভর বস্তু পরস্পরকে যে বলে আকর্ষণ করে তা,



(i) বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক। $F \propto m_1 m_2$

(ii) বস্তুদ্বয়ের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। $F \propto \frac{1}{d^2}$

(iii) এই বল কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে।

সুতরাং, $F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$

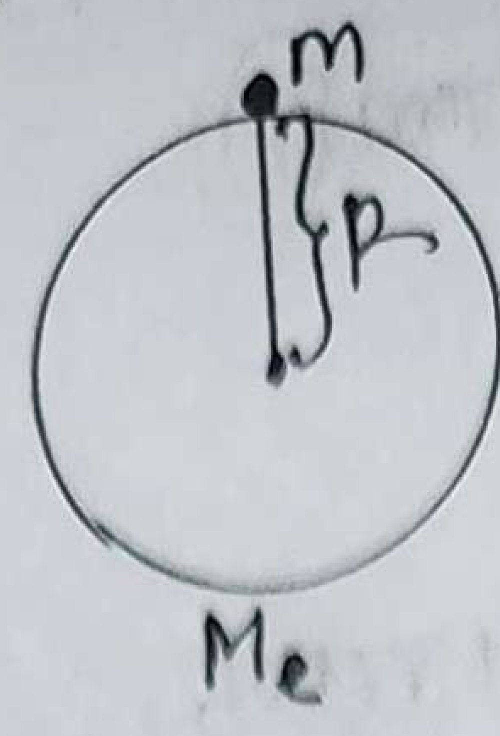
বা, $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ | সার্বজনীন মহাকর্ষ ধ্রুবক, $G = 6.673 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ |

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

দুটি বস্তুর একটি পৃথিবী হলে, $F = G\frac{Mm}{d^2}$

পৃথিবীর ভর, $M = 6 \times 10^{24}$ kg

পৃথিবীর ভর নির্ণয় :



পৃথিবীর ভর = M_e

ভূপৃষ্ঠে রাখা একটি বস্তুর ভর = m

বস্তুটির ওজন, $W = F = mg$

অভিকর্ষ বল, $F = G\frac{Mm}{R^2}$

$$\Rightarrow mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$\Rightarrow M_e = \frac{gR^2}{G}$$

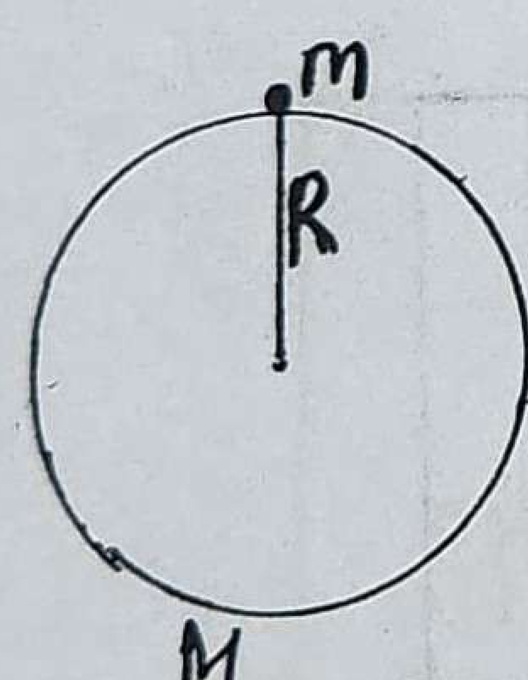
$$= \frac{9.8 \times (6400 \times 10^3)^2}{6.673 \times 10^{-11}}$$

$$= 6 \times 10^{24}\ kg.$$

পৃথিবীর ভর $= 6 \times 10^{24}\ kg$

অভিকর্ষজ ত্বরণ

"অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত কোনো বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।"



$$F_G = \frac{GMm}{R^2} \quad \text{—(i)}$$

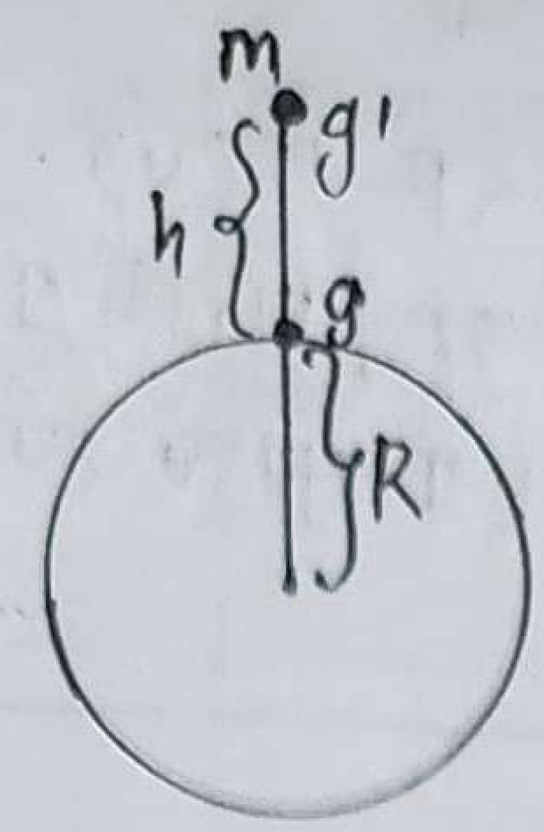
$$F_G = mg \quad \text{—(ii)}$$

i ও ii হতে পাই, $mg = \frac{GMm}{R^2}$

$$\Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$	R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6400\ km$

ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ:



$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow mg' = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \text{---(i)}$$

ভূপৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$ ---(ii)

> ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$

$$(i \div ii) \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2} \times \frac{R^2}{GM}$$

$$= \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\Rightarrow g' = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$$

> ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$
> $R =$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের সন্নিকট মান নির্ণয়:

$$g' = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g = \left(\frac{R+h}{R}\right)^{-2} g = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} g$$

$$\Rightarrow g' = \left[1 + (-2)\frac{h}{R} + \frac{(-2)(-2-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \dots\right] g$$

$$= \left\{1 - \frac{2h}{R} + 0 + 0 + \dots\right\} g \quad [\text{যখন } h <<<<< R]$$

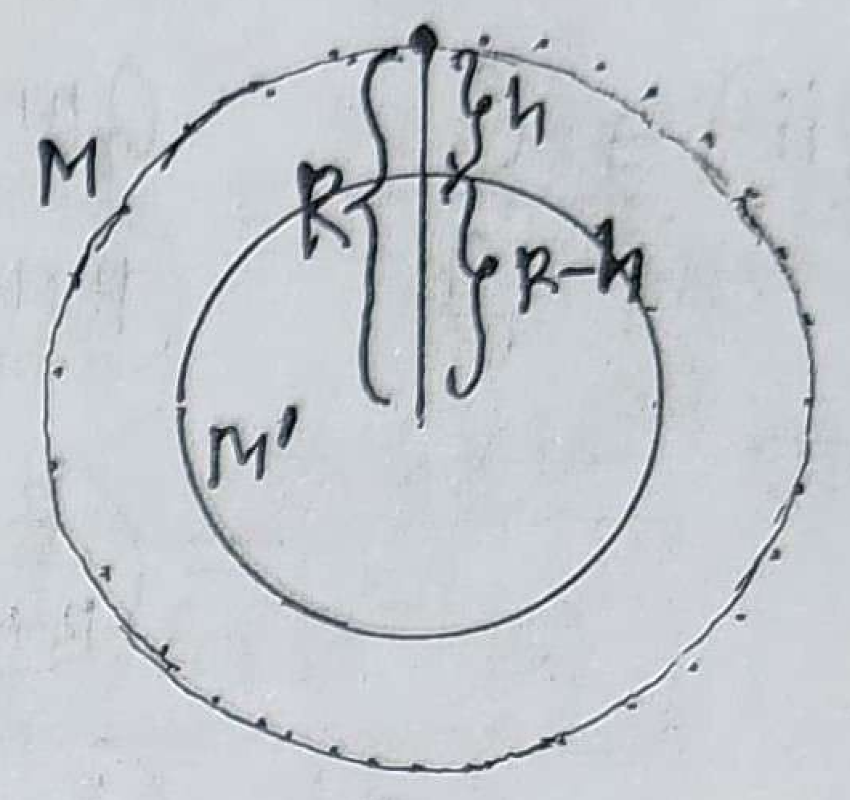
$$\Rightarrow g' = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g$$

ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের সন্নিকৃষ্ট মান :

$g' = \left(1 - \frac{2h}{R}\right)g$. সূত্রটি $h <<< R$ শর্তের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। Math এ সচরাচর এই সূত্র ব্যবহৃত হয় না।

ভূপৃষ্ঠ হতে h গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ :

ভূপৃষ্ঠ হতে যত উচ্চতায় যাওয়া হোক না কেন- পৃথিবীর ভরের কোনো পরিবর্তন হবে না। কিন্তু গভীরতায় গেলে ভরের পরিবর্তন হবে। $M = \rho V$ সূত্র ব্যবহার করে পরিবর্তিত ভর বের করে নিতে হবে। আর সে জন্য পৃথিবীকে গড় ঘনত্বের সুষম গোলক ধরে নিবো- যদিও পৃথিবী গড় ঘনত্বের সুষম গোলক নয়।



ভূপৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G\rho V}{R^2} = \frac{G\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{R^2}$

$\Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi R G\rho$ —— (i)

h গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{GM'}{(R-h)^2} = \frac{G\rho V'}{(R-h)^2} = \frac{G\rho \frac{4}{3}\pi (R-h)^3}{(R-h)^2}$

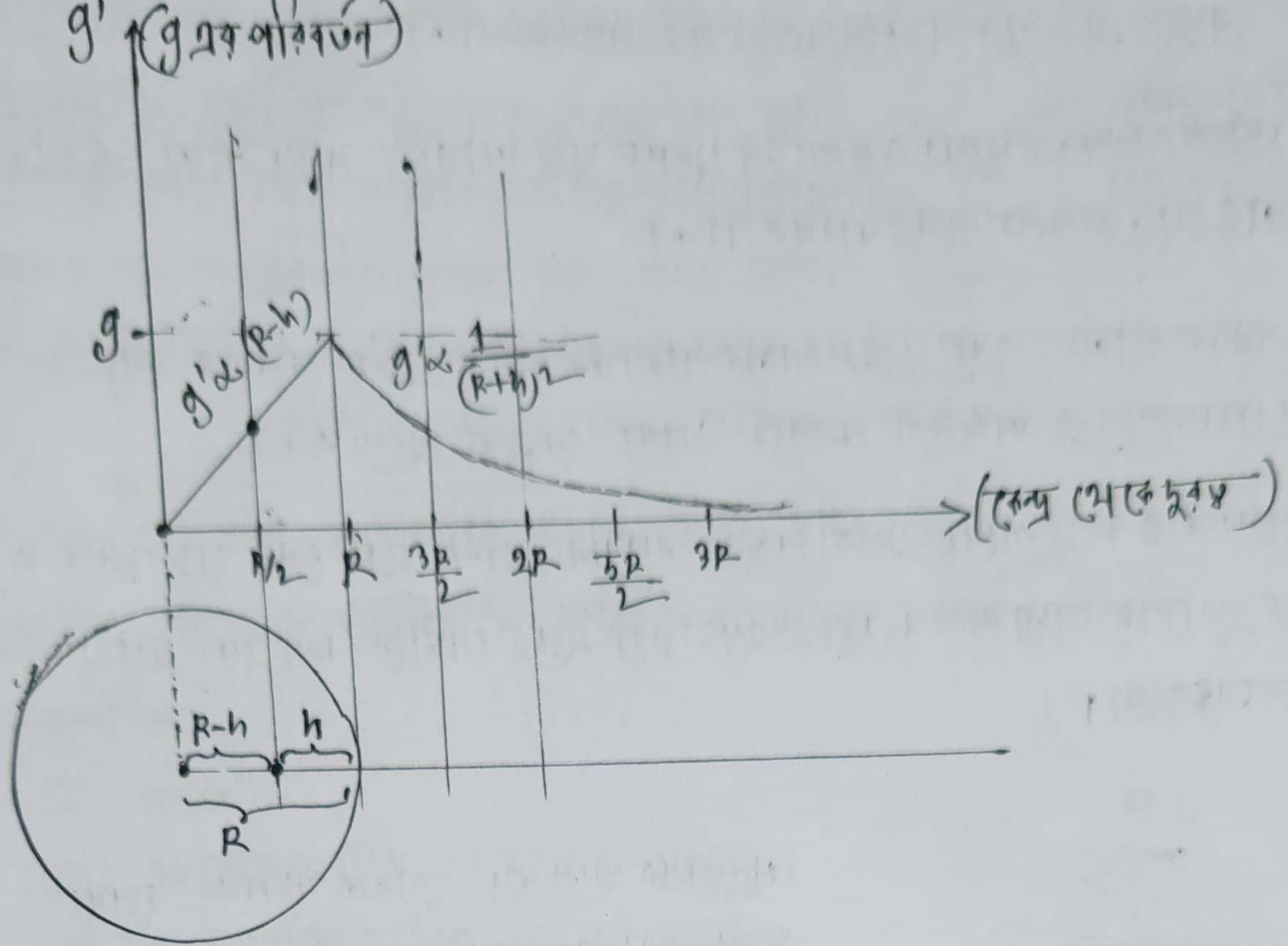
$\Rightarrow g' = \frac{4}{3}\pi (R-h) G\rho$ —— (ii)

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R}$

$\Rightarrow g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right)g$

ভূপৃষ্ঠ হতে h গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \left(1 - \frac{h}{R}\right)g$

ভূপৃষ্ঠ হতে h গভীরতায় এবং h উচ্চতায় g এর মানের পরিবর্তনের graph



h গভীরতায়, $g' = \left(\frac{R-h}{R}\right) g$

$= \frac{g}{R} = p$

$g' = \frac{g}{R}(R-h)$

$\Rightarrow y = mx$

মূলবিন্দুগামী সরলরেখা

h উচ্চতায়, $g' = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$

$\Rightarrow g' = \frac{1}{(R+h)^2} R^2 g$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} k$

$\Rightarrow x^2 = yk$

যা পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

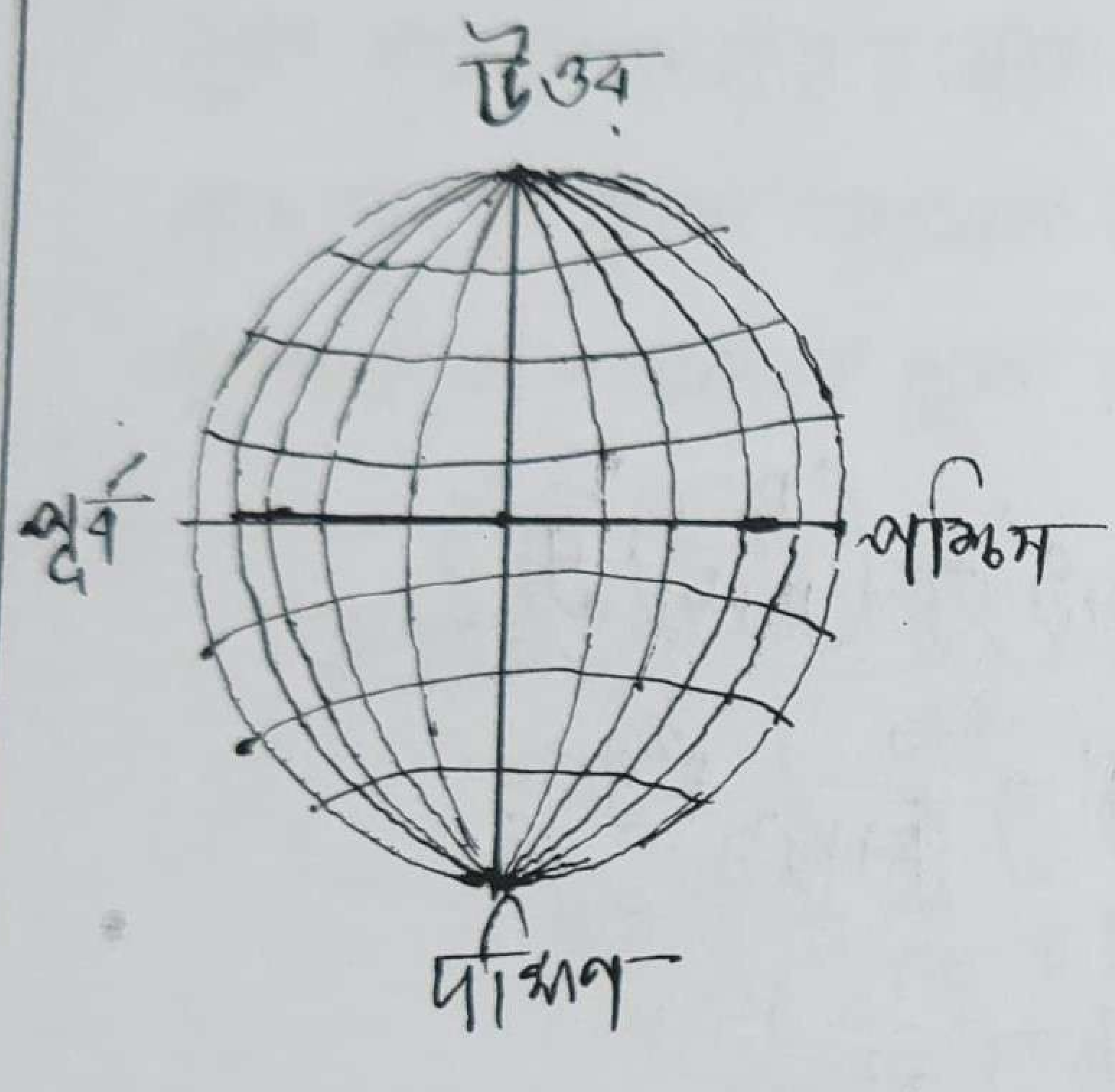
আহ্নিক গতির জন্য g এর মানের পরিবর্তন

পৃথিবী তার নিজ অক্ষে একবার ঘুরে আসতে সময় লাগে ২৪ ঘন্টা। নিজ অক্ষে এই ঘূর্ণন গতিকে বলা হয় আহ্নিক গতি।

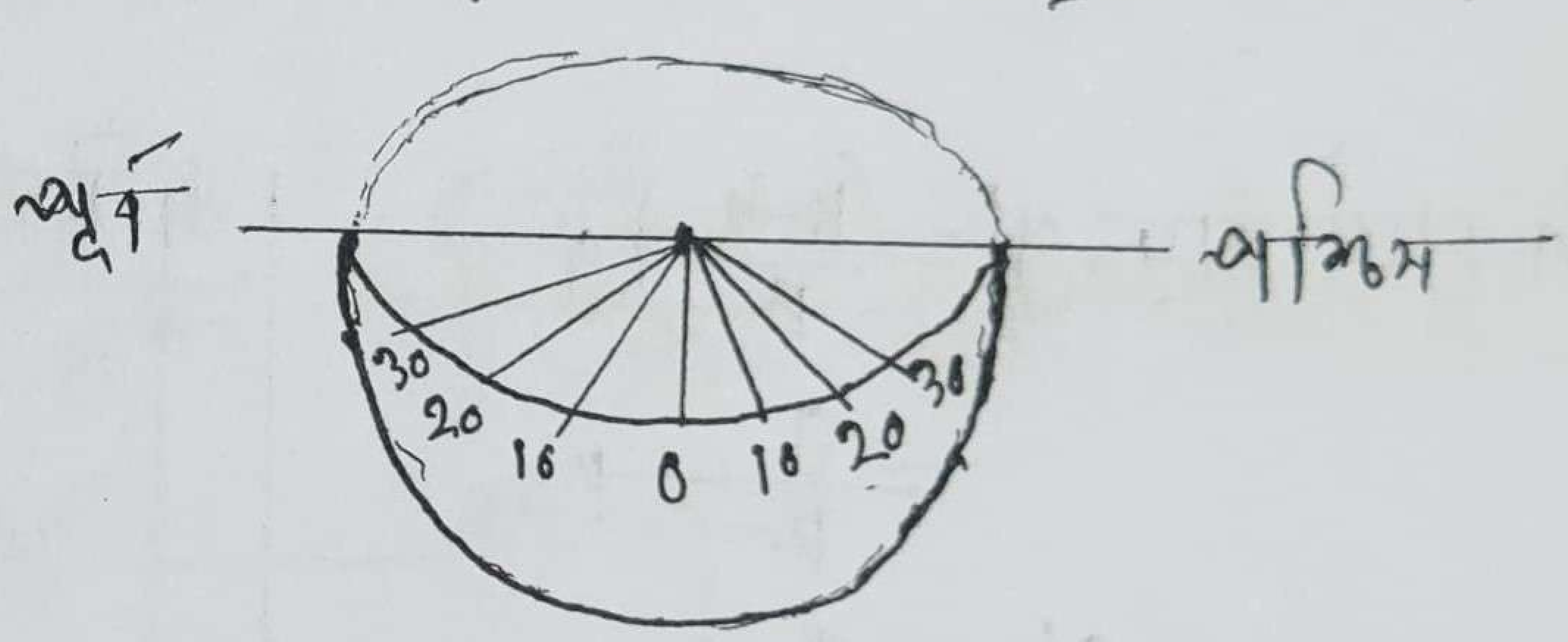
পৃথিবী যখন সূর্যের চারপাশে একবার ঘুরে আসে, সময় লাগে ৩৬৫ দিন। এই গতিকে বলা হয় বার্ষিক গতি।

আহ্নিক গতির জন্য g এর মানের পরিবর্তন হয়। এটা বোঝার জন্য দ্রাঘিমাংশ ও অক্ষাংশ সম্পর্কে ধারণা নেওয়া প্রয়োজন

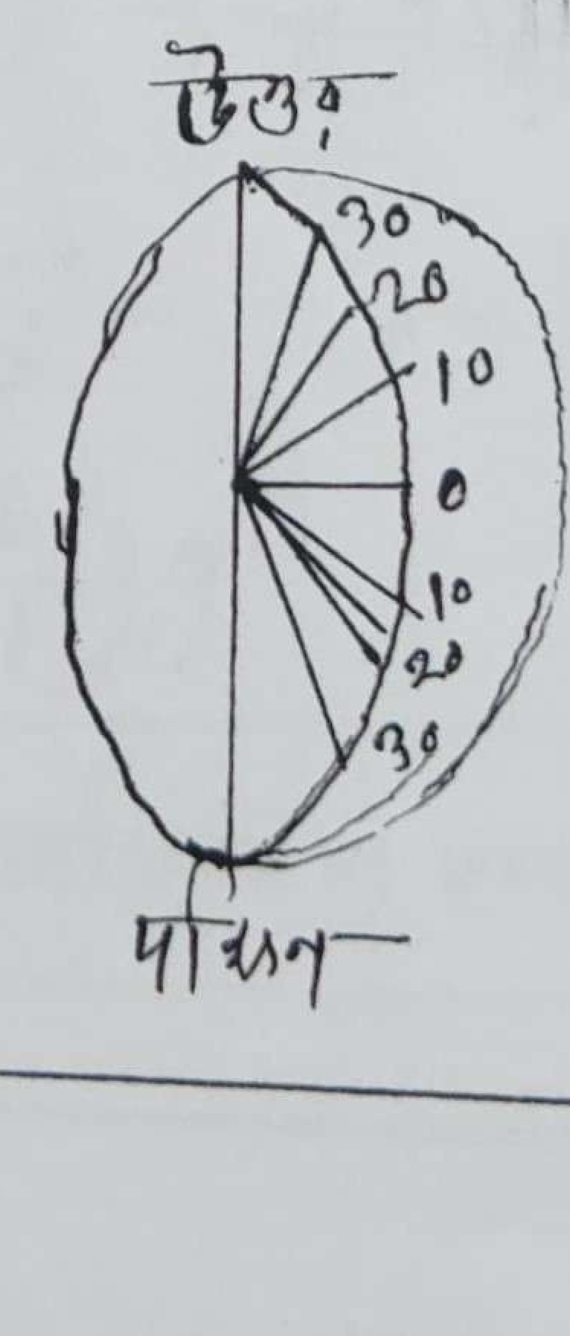
পৃথিবীর উপর কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান সঠিকভাবে বোঝানোর জন্য যে কৌণিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা গ্রহণ করা হয়, সেটাকে বলা হয় দ্রাঘিমাংশ বা অক্ষাংশ।



অনুভূমিক তলে যে কৌণিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা গ্রহণ করা হয় সেটাকে বলে দ্রাঘিমাংশ

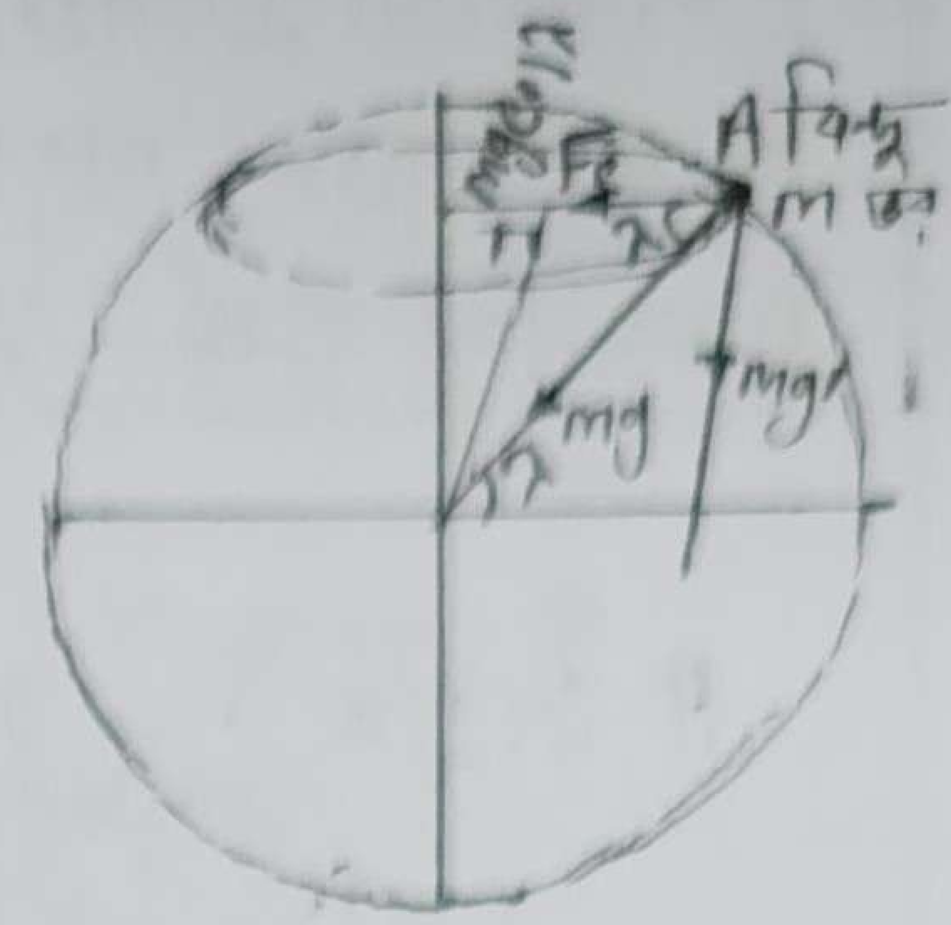


উলম্ব তলে যে কৌণিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা গ্রহণ করা হয়, সেটা হলো অক্ষাংশ।



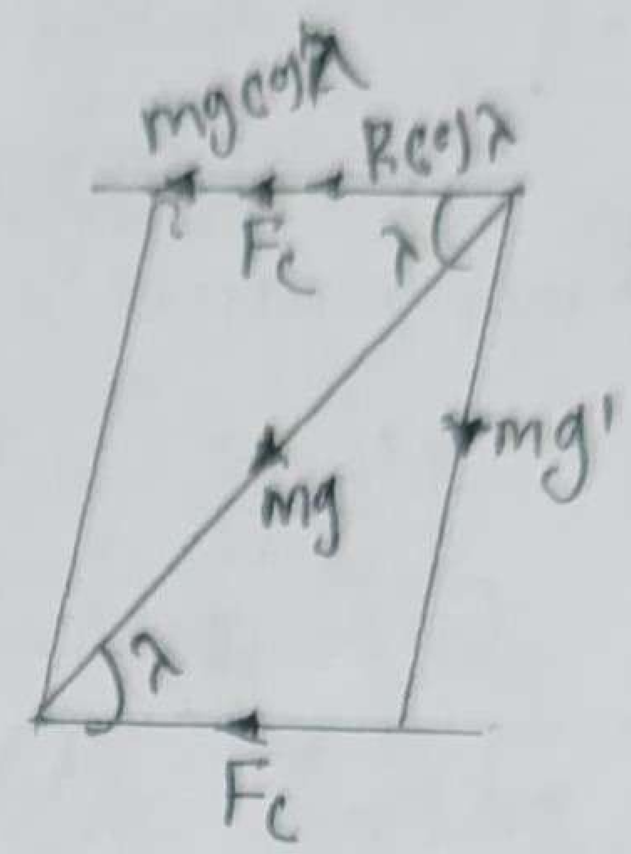
* দ্রাঘিমাংশের জন্য g এর মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। পরিবর্তন হয় অক্ষাংশের জন্য।

ধরি, পৃথিবীর উপর A বিন্দুতে λ অক্ষাংশে একটি বস্তু আছে, যার ভর m. বস্তুটি পৃথিবীর সাথে ঘোরার ফলে একটি বৃত্তপথে ঘোরে, যার ব্যাসার্ধ $= r$. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= R$. বস্তুর ওজন mg পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করে। পৃথিবীর কৌণিক বেগ ω এবং পর্যায়কাল $T = 24\,h$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.1416}{24\times 3600}$$

$$= 7.27\times 10^{-5}\ rad\,s^{-1}$$



কেন্দ্রমুখী বল,

$$F_c = m\omega^2 r$$

$$= m\omega^2 R\cos\lambda$$

$$\Rightarrow F_c^2 = m^2\omega^4 R^2\cos^2\lambda$$

$$= 0 \quad \boxed{\omega^4 \to 0}$$

কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\cos\lambda = \frac{(mg)^2 + F_c^2 - (mg')^2}{2(mg)F_c}$$

$$\Rightarrow m^2g^2 + F_c^2 - m^2g'^2 = 2mgF_c\cos\lambda \quad (F_c^2 \to 0,\ F_c \to m\omega^2R\cos\lambda)$$

$$\Rightarrow g^2 - g'^2 = 2g\omega^2R\cos^2\lambda$$

$$\Rightarrow g'^2 = g^2 - 2g\omega^2R\cos^2\lambda$$

$$= g^2\left(1 - \frac{2\omega^2R\cos^2\lambda}{g}\right)$$

$$\Rightarrow g' = g\left(1 - \frac{2\omega^2R\cos^2\lambda}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g' = g\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(-2\omega^2R\cos^2\lambda)}{g} + \dots\right\}$$

$$= g\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2\omega^2R\cos^2\lambda}{g} + 0 + 0\dots\right)$$

$$= g\left(1 - \frac{\omega^2R\cos^2\lambda}{g}\right)$$

$$\boxed{g' = g - \omega^2R\cos^2\lambda}$$

আহ্নিক গতির জন্য কোনো স্থানের অভিকর্ষজ
ত্বরণ, $g' = g - \omega^2 R \cos^2\lambda$

এখানে, λ = অক্ষাংশ
ω = পৃথিবীর কৌণিক বেগ
$= 7.27 \times 10^{-5}\ rad\ s^{-1}$

মেরুতে, $\lambda = 90°$

$g' = g - \omega^2 R \cos^2 90°$

$\Rightarrow g' = g$

বিষুব রেখায়, $\lambda = 0$

$g' = g - \omega^2 R \cos^2 0$

$\Rightarrow g' = g - \omega^2 R$

মেরু অঞ্চল ও বিষুব রেখায় –

অভিকর্ষজ ত্বরণের পার্থক্য, $\Delta g' = g - (g - \omega^2 R)$

$\Rightarrow \Delta g' = \omega^2 R$